第 54 卷 第 3 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 54 No. 3
2015 年 5 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI May 2015

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2015.03.010

亚纯函数差分算子与分担值*

曾翠萍
（广东金融学院应用数学系，广东 广州 510521）

摘 要： 研究了涉及差分算子分担值的亚纯函数唯一性问题。证明了亚纯函数族中两个一般形式的差分算子分担一个值的唯一性定理。

关键词： 亚纯函数；分担值；差分算子；唯一性

中图分类号： O174.52 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529－6579（2015）03－0056－04

Difference Operators of Meromorphic Functions and Shared Values

ZENG Cuiping
（Department of Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China）

Abstract: The problems of uniqueness concerning difference operators are studied. And some results on two general difference operators of meromorphic functions shared a value are obtained.

Key words: meromorphic function; shared value; difference operators; uniqueness

本文采用通常的 Nevanlinna 理论中的记号，参见文献［1］。特别地，对于一个非常数亚纯函数 f，记 $N_{(2}(r,\frac{1}{f-a})$ 为 $f-a$ 的重零点的计数函数；$N_{1)}(r,\frac{1}{f-a})$ 为 $f-a$ 的简单零点的计数函数；记 $N_2(r,\frac{1}{f-a}) = \overline{N}(r,\frac{1}{f-a}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f-a})$。

设 f 是复平面上的一个亚纯函数，c 是非零复数。我们称 $f(z+c)$ 为 f 的平移，称 $\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z)$ 和 $\Delta_c^n f(z) = \Delta_c(\Delta_c^{n-1} f(z))$，$n \geq 2$ 分别为 f 的一阶差分和 n 阶差分。特别地，给出函数 f 的差分算子的一般形式

$$F_f(z) = m_1 f(z+c_1) + m_2 f(z+c_2) + \cdots + m_k f(z+c_k) \tag{1}$$

其中 k 为正整数，$m_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为复数，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为互异的有穷复数。显然，平移及一阶差分、n 阶差分均为（1）的特殊形式。

1994 年，仪洪勋[2]证明了下面两个定理：

定理 B[2] 设 f 和 g 为两个整函数，满足 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ CM 分担 1，如果

$$N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{g}) < (\lambda + o(1))T(r)$$

其中 $0 < \lambda < 1$，$T(r) = \max\{T(r,f), T(r,g)\}$，则 $f^{(k)}g^{(k)} \equiv 1$ 或 $f \equiv g$。

定理 C[2] 设 f 和 g 为两个亚纯函数，满足 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ CM 分担 1，f 和 g CM 分担 ∞。若

$$N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{g}) + (k+2)\overline{N}(r,f) < (\lambda + o(1))T(r)$$

其中 $0 < \lambda < 1$，$T(r) = \max\{T(r,f), T(r,g)\}$，则 $f^{(k)}g^{(k)} \equiv 1$ 或 $f \equiv g$。

2006 年，Halburd 和 Korhonen[3-4]建立了一系列关于亚纯函数差分算子的对数导数引理和 Navanlinna 定理。这使得原来涉及导数分担值的唯一性问题相应地可以转化为涉及差分分担值问题。近

* 收稿日期：2014－12－17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11271090，11271378）；广东省高校创新强校工程自主创新能力提升类培育资助项目
作者简介：曾翠萍（1972 年生），女；研究方向：复分析；E-mail：ytxzcp@163.com

年来也涌现了一批相关的结果[5-8]。很自然地，我们会问：若将定理B和定理C中k阶导数分担值换成k阶差分分担值，结论是否仍然成立？我们证明了更一般的结论。

1　主要结果

定理1　设f和g为两个有穷级亚纯函数，F_f和F_g分别是f和g的非常数差分算子。如果F_f和F_gCM分担1，f和gCM分担∞，且

$$N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)<(\lambda+o(1))T(r)$$

其中$0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则$F_fF_g\equiv 1$或$F_f\equiv F_g$。

作为定理1的特殊情形，我们得到以下三个推论。

推论1　设f和g为两个有穷级整函数。如果f和g的非常数差分算子F_f和F_gCM分担1，且

$$N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})<(\lambda+o(1))T(r)$$

其中$0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则$F_fF_g\equiv 1$或$F_f\equiv F_g$。

推论2　设f和g为两个有穷级亚纯函数。如果f和g的非常数k阶差分算子$\Delta_c^k f(z)$和$\Delta_c^k g(z)$CM分担1，f和g CM分担∞，且

$$N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)<(\lambda+o(1))T(r)$$

其中$0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则$\Delta_c^k f(z)\Delta_c^k g(z)\equiv 1$或$\Delta_c^k f(z)\equiv\Delta_c^k g(z)$。

推论3　设f和g为两个有穷级整函数。如果f和g的非常数k阶差分算子$\Delta_c^k f(z)$和$\Delta_c^k g(z)$ CM分担1，且

$$N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})<(\lambda+o(1))T(r)$$

其中$0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则$\Delta_c^k f(z)\Delta_c^k g(z)\equiv 1$或$\Delta_c^k f(z)\equiv\Delta_c^k g(z)$。

例1　设$f(z)=2z+3$，$g(z)=3z+2$，$c=1$。则$F_f=f(z+1)-f(z)=2$，$F_g=g(z+1)-g(z)=3$

例2　设$f(z)=e^z+2z$，$g(z)=e^{2z}+z$，$c=2\pi i$。则

$$F_f=f(z+2\pi i)-f(z)=4\pi i,$$
$$F_g=g(z+2\pi i)-g(z)=2\pi i$$

从上述两例容易看出F_f和F_g均为常数，且满足F_f和F_gCM分担1，但$F_fF_g\equiv 1$和$F_f\equiv F_g$均不成立。此例说明定理1中“F_f和F_g是f和g的非常数差分算子”这一条件是必需的。

2　若干引理

为了证明定理1，我们需要下列引理。

引理1[9]　设$f(z)$是有穷级亚纯函数，c是非零复数，则

$$m(r,\frac{f(z+c)}{f(z)})=S(r,f),$$
$$m(r,\frac{f(z)}{f(z+c)})=S(r,f)$$

引理2　设f和g为两个有穷级亚纯函数。如果两个非常数差分算子F_f和F_gCM分担1，则下面的（i）式或（ii）式必有一个成立。

（i）$T(r,F_f)+T(r,F_g)\leqslant 2\{\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,F_g)\}+N_2(r,\frac{1}{F_f})+N_2(r,\frac{1}{F_g})+N_2(r,\frac{1}{F_f-1})+S(r)$；

（ii）$\dfrac{1}{F_f-1}=\dfrac{a}{F_g-1}+b$

其中$a(\neq 0)$，b是复数，$S(r)=\max\{S(r,f),S(r,g)\}$。

证明　设

$$\varphi(z)=\frac{F_f''}{F_f'}-2\frac{F_f}{F_f-1}-\frac{F_g''}{F_g'}+2\frac{F_g}{F_g-1}\qquad(2)$$

下面分两种情况讨论。

情况1　$\varphi(z)\equiv 0$。由于F_f和F_g是非常数的差分算子，经计算易得$\dfrac{1}{F_f-1}=\dfrac{a}{F_g-1}+b$，其中$a(\neq 0)$，$b$是复数。故（ii）式成立。

情况2　$\varphi(z)\not\equiv 0$。如果z_0是F_f-1和F_g-1的公共简单零点，则将它们在z_0处的泰勒展式代入（2）式，经计算知z_0是$\varphi(z)$的零点。于是，结合引理1的结论有

$$N_{1)}(r,\frac{1}{F_f-1})=N_{1)}(r,\frac{1}{F_g-1})\leqslant N(r,\frac{1}{\varphi})\leqslant T(r,\varphi)+O(1)\leqslant N(r,\varphi)+S(r)\qquad(3)$$

又由于F_f和F_gCM分担1，从（2）式可知$\varphi(z)$的极点只可能产生在f和g的极点或F_f'和F_g'的零点中。因此有

$$N(r,\varphi)\leqslant\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,F_g)+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F_f})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F_g})+N_0(r,\frac{1}{F_f'})+N_0(r,\frac{1}{F_f'})\qquad(4)$$

其中计数函数$N_0(r,\frac{1}{F_f'})$包含F_f'的零点但不包含

F_f-1 和 F_f 的零点。$N_0(r,\frac{1}{F_g'})$ 的意义相同。

由第二基本定理，有

$$T(r,F_f)\leqslant\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,\frac{1}{F_f})+\overline{N}(r,\frac{1}{F_f-1})-N_0(r,\frac{1}{F_f'})+S(r,F_f);$$

$$T(r,F_g)\leqslant\overline{N}(r,F_g)+\overline{N}(r,\frac{1}{F_g})+\overline{N}(r,\frac{1}{F_g-1})-N_0(r,\frac{1}{F_g'})+S(r,F_g)\qquad(5)$$

注意到

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F_f-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{F_g-1})=2\overline{N}(r,\frac{1}{F_f-1})\leqslant N_{1)}(r,\frac{1}{F_f-1})+N_2(r,\frac{1}{F_f-1})\qquad(6)$$

结合（3）–（6）式，有

$$T(r,F_f)+T(r,F_g)\leqslant2\{\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,F_g)\}+\overline{N}(r,\frac{1}{F_f})+\overline{N}(r,\frac{1}{F_g})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F_f})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F_g})+N_2(r,\frac{1}{F_f-1})+S(r)\leqslant2\{\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,F_g)\}+N_2(r,\frac{1}{F_f})+N_2(r,\frac{1}{F_g})+N_2(r,\frac{1}{F_f-1})+S(r)$$

故（i）式成立。引理 2 证毕。

3 定理的证明

根据定理 1 的条件，由引理 2 可知其中（i）式和（ii）式必有一个成立。下面分两种情形讨论。

情况 1 引理 2 中的（i）式成立。由引理 1 有

$$m(r,\frac{1}{f})=m(r,\frac{F_f}{f}\cdot\frac{1}{F_f})\leqslant m(r,\frac{1}{F_f})+S(r,f)$$

又

$$T(r,F_f)=N(r,F_f)+m(r,F_f)\leqslant kN(r,f)+m(r,f)+S(r,f)=T(r,f)+(k-1)N(r,f)+S(r,f)$$

结合上述两式，有

$$N(r,\frac{1}{F_f})=T(r,\frac{1}{F_f})-m(r,\frac{1}{F_f})\leqslant T(r,F_f)-m(r,\frac{1}{f})+S(r,f)\leqslant T(r,f)+(k-1)N(r,f)-m(r,\frac{1}{f})+S(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+(k-1)N(r,f)+S(r,f)\qquad(7)$$

下面从另一角度给出 $N(r,\frac{1}{F_g})$ 的估计。

$$N(r,\frac{1}{F_g})=T(r,\frac{1}{F_f})-m(r,\frac{1}{F_g})\leqslant T(r,F_g)-m(r,\frac{1}{g})+S(r,g)\leqslant T(r,F_g)-T(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g})+S(r,g)\leqslant T(r,F_g)-T(r,g)+N(r,\frac{1}{g})+S(r,g)\qquad(8)$$

由引理 2 的（i）式并结合（7）式和（8）式得

$$T(r,F_f)+T(r,F_g)\leqslant2\{\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,F_g)\}+N(r,\frac{1}{F_f})+N(r,\frac{1}{F_g})+N(r,\frac{1}{F_f-1})+S(r)\leqslant2\{\overline{N}(r,F_f)+\overline{N}(r,F_g)\}+N(r,\frac{1}{f})+(k-1)N(r,f)+T(r,F_g)-T(r,g)+N(r,\frac{1}{g})+T(r,F_f)+S(r)$$

从而有

$$T(r,g)\leqslant2k\{\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,g)\}+N(r,\frac{1}{f})+(k-1)N(r,f)+N(r,\frac{1}{g})+S(r)$$

再结合 f 和 gCM 分担 ∞，得

$$T(r,g)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)+S(r)\qquad(9)$$

因为 F_f 和 F_gCM 分担 1，故引理 2（i）式中的 $N_2(r,\frac{1}{F_f-1})$ 可以替代为 $N_2(r,\frac{1}{F_g-1})$。类似地，可得

$$T(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)+S(r)\qquad(10)$$

由（9）式和（10）式有

$$T(r)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)+S(r)$$

结合定理 1 的条件有 $T(r)\leqslant(\lambda+o(1))T(r)$，矛盾。

情况 2 引理 2 中的（ii）式成立。显然

$$T(r,F_f)=T(r,F_g)+O(1)\qquad(11)$$

引理 2 中的（ii）式可改写为

$$F_f=\frac{(b+1)F_g+(a-b-1)}{bF_g+(a-b)}\qquad(12)$$

其中 $a(\neq0)$，b 是复数。下面再分三种情况讨论：

① $b\neq0,-1$。

如果 $a-b-1\neq0$，那么由（12）式有

$$N\left(r,\frac{1}{F_f}\right)=N\left(r,\frac{1}{F_g+\frac{a-b-1}{b+1}}\right)\qquad(13)$$

由第二基本定理及（7）、(8）和（13）式，得

$$T(r,F_g) \leqslant \overline{N}(r,F_g) + \overline{N}(r,\frac{1}{F_g}) +$$
$$\overline{N}(r,\frac{1}{F_g + \frac{a-b-1}{b+1}}) + S(r,F_g) \leqslant$$
$$\overline{N}(r,F_g) + \overline{N}(r,\frac{1}{F_g}) + \overline{N}(r,\frac{1}{F_f}) + S(r,g) \leqslant$$
$$kN(r,g) + T(r,F_g) - T(r,g) + N(r,\frac{1}{g}) +$$
$$N(r,\frac{1}{f}) + (k-1)N(r,f) + S(r) \qquad (14)$$

结合 f 和 gCM 分担 ∞，有

$$T(r,g) \leqslant N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{g}) +$$
$$(2k-1)N(r,f) + S(r) \qquad (15)$$

另一方面，在（14）式的推算中交换（7）、（8）两式的运用，再结合（11）式可得

$$T(r,f) \leqslant N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{g}) +$$
$$(2k-1)N(r,f) + S(r) \qquad (16)$$

由（15）、(16）式并结合定理 1 的条件有 $T(r) \leqslant (\lambda + o(1))T(r)$，矛盾。

如果 $a-b-1=0$，则由（12）式可得 $\overline{N}(r,F_f) = \overline{N}(r,\frac{1}{F_g+\frac{1}{b}})$ 和 $\overline{N}(r,\frac{1}{F_f}) = \overline{N}(r,\frac{1}{F_g})$。通过与上面类似的计算可得

$$T(r,g) \leqslant N(r,\frac{1}{g}) + 2kN(r,f) + S(r)$$

和

$$T(r,f) \leqslant N(r,\frac{1}{f}) + 2kN(r,f) + S(r)$$

同理，由定理 1 的条件可得 $T(r) \leqslant (\lambda + o(1))T(r)$，也矛盾。

② $b=-1$。

则（12）式改写为

$$F_f = \frac{-a}{F_g - (a+1)} \qquad (17)$$

如果 $a+1 \neq 0$，则由（17）式可知 $\overline{N}(r,F_f) = \overline{N}(r,\frac{1}{F_g-(a+1)})$ 和 $\overline{N}(r,\frac{1}{F_f}) = \overline{N}(r,F_g)$。应用第二基本定理及类似情况 2 中的①的讨论，得

$$T(r,g) \leqslant N(r,\frac{1}{g}) + 2kN(r,f) + S(r)$$

和

$$T(r,f) \leqslant N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{g}) + (2k-1)N(r,f) + S(r)$$

由定理 1 条件也得到 $T(r) \leqslant (\lambda + o(1))T(r)$，矛盾。

如果 $a+1=0$，则由（17）式可得 $F_fF_g \equiv 1$。

③ $b=0$。

（12）式改写为

$$F_f = \frac{F_g + (a-1)}{a} \qquad (18)$$

如果 $a-1 \neq 0$，则由（18）式可知 $\overline{N}(r,\frac{1}{F_f}) = \overline{N}(r,\frac{1}{F_g+(a-1)})$。应用第二基本定理及类似情况 2 中的①的讨论，得 $T(r) \leqslant N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{g}) + (2k-1)N(r,f) + S(r)$，这与定理 1 条件矛盾。

如果 $a-1=0$，则由（18）式有 $F_f \equiv F_g$。

定理 1 证毕。

参考文献：

［1］ YANG L. Value distribution theory ［M］. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

［2］ YI H X. Unicity theorems for entire or meromorphic functions［J］. Acta Math Sinica（N. S.）, 1994, 10: 121 – 131.

［3］ HALBURD R G, KORHONEN R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations ［J］. J Math Anal Appl, 2006, 314: 477 – 487.

［4］ HALBURD R G, KORHONEN R J. Nevanlinna theory for the difference operators ［J］. Ann Acad Sci Fenn Math, 2006, 31: 463 – 478.

［5］ HEITTOKANGAS J, KORHONEN R J, LAINC I, et al. Uniqueness of meromorphic functions sharing values with their shifts ［J］. Complex Var Elliptic Equ, 2011, 56: 81 – 92.

［6］ CHEN Z X, YI H X. On sharing values of meromorphic functions and their difference［J］. Results Math, 2013, 63: 557 – 565.

［7］ ZHANG J, LIAO L W. Entire functions sharing some values with their difference operators ［J］. Sci China Math, 2014, 57: 2143 – 2152.

［8］ ZHANG J, LIAO L W. Entire functions sharing zero CM with their high order difference operators［J］. Taiwanese J Math, 2014, 18: 701 – 709.

［9］ CHIANG Y M, FENG S J. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane［J］. Ramanujan J, 2008, 16: 105 – 129.